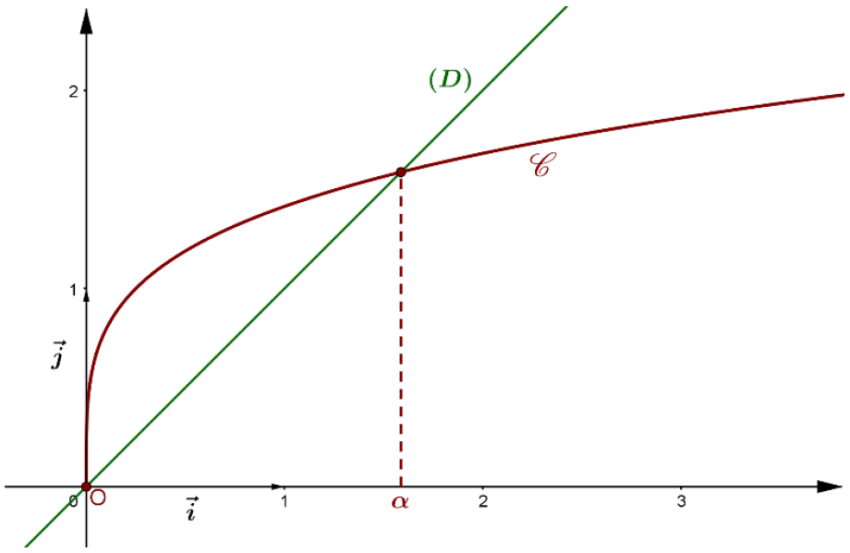
EXERCICE N°2 :	CONTROLE	35'	4 points	

Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt[4]{4x}$, la droite (D) d'équation $y=x$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point O et en un autre point d'abscisse α.



1°) Vérifier que $\alpha=\sqrt[3]{4}$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on désigne par (u_n) la suite définie par $\begin{cases}u_0=4\\ u_{n+1}=f(u_n),\ \text{pour tout } n\in IN\end{cases}$.

a) Classer dans l'ordre croissant les réels u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $u_n>0$.

c) Soit $n\in IN$. Montrer que, si $u_{n+1}\le u_n$ alors $u_{n+2}\ge u_{n+1}$.

d) Montrer que la suite (u_n) n'est pas monotone.

3°) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)=f(f(x))$.

4°) Pour tout $n\in IN$, on pose $v_n=u_{2n+1}$ et $w_n=u_{2n}$.

a) Vérifier que pour tout $n\in IN$, $v_{n+1}=g(v_n)$ et $w_{n+1}=g(w_n)$.

b) En utilisant la monotonie de la fonction g. montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$:
$v_n\le v_{n+1}\le\alpha\le w_{n+1}\le w_n$.

c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn